

On-the-job search i endogeniczna destrukcja w modelu DSGE z silną heterogenicznością ex-post



ibs

INSTYTUT BADAŃ STRUKTURALNYCH

www.ibs.org.pl

Marek Antosiewicz*, Maciej Bukowski†, Paweł Kowal‡

IBS WORKING PAPER #03/2011

Streszczenie

W artykule konstruujemy model DSGE wyposażony w mechanizm poszukiwań i dopasowań na rynku pracy w duchu Mortensena i Pissaridesa (1994) i Merz (1995). Implementujemy w nim endogeniczną destrukcję miejsc pracy oraz przepływy w obrębie zatrudnienia. W odróżnieniu od innych autorów, którzy zajmowali się tą problematyką w obrębie metodologii DSGE nie posługujemy się jednak zdefiniowaną na skończonym zbiorze dyskretnym heterogenicznością ex-ante, lecz ciągłą heterogenicznością ex-post dopuszczając idiosynkratyczne szoki produktywności dotykające osoby pracujące oraz nowo podejmujące pracę. Zaprezentowana metoda integruje aproksymację rozkładów prawdopodobieństwa wielomianami Chebysheva i kwadraturową metodę obliczania wartości całek oznaczonych, z metodologią perturbacyjną Judda (1993) rozwiązywania modeli DSGE. Pozwala nam ona na znaczne rozszerzenie zakresu zastosowań modeli DSGE, a przez to tworzenie bardziej realistycznych modeli gospodarki uwzględniających np. obserwowane w rzeczywistości różnice w indywidualnych dochodach czy wielkości przedsiębiorstw. Ilustrujemy ten potencjał na przykładzie analizy rozkładu wynagrodzeń w gospodarce, dyskutując jednocześnie własności cykliczne głównych modelowanych agregatów. Zaprezentowana metoda budowy i rozwiązywania silnie heterogenicznych modeli DSGE jest potencjalnie bardzo użyteczna w wielu obszarach ekonomii, ponieważ pozwala uniknąć tzw. przekleństwa dużego wymiaru, ograniczającego zakres zastosowań metod opartych o iterację funkcji wartości typowo wykorzystywanych w analizach uwzględniających szoki idiosynkratyczne.

JEL classification: C63, C78, E24; E32, J64

Keywords: DSGE, on-the-job search, endogenous destruction, labor market frictions, heterogenous macroeconomic models, perturbation method

*Instytut Badań Strukturalnych, marek.antosiewicz@ibs.org.pl

†Instytut Badań Strukturalnych i Szkoła Główna Handlowa, maciej.bukowski@ibs.org.pl

‡Instytut Badań Strukturalnych, pawel.kowal@ibs.org.pl

1 Wprowadzenie

W trakcie ostatnich trzech dekad teoria makroekonomii została zdominowana przez metodologię realnego cyklu koniunkturalnego (RBC) i wywodzące się z niej dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej (DSGE). W typowym modelu DSGE część założeń neoklasycznego modelu wzrostu Kydlanda i Prescottta (1982) mówiących o doskonale elastycznych cenach, płacach i rynkach zostaje uchylona, przez co gospodarka zachowuje się w sposób suboptymalny tworząc przestrzeń dla interwencji publicznej. Jednym z obszarów niedoskonałości rynkowych włączonych do programu DSGE po raz pierwszy przez Merz (1995) oraz Andolfatto (1996), są frykcje na rynku pracy tłumaczące jednoczesne współwystępowanie w gospodarce niezapełnionych wakatów i bezrobocia. Struktury teoretycznej dostarczył mechanizm poszukiwań i dopasowań na rynku pracy zaproponowany w postaci modelu równowagi częściowej przez Mortensena i Pissaridesa (1994). Na przestrzeni lat modele Merz i Andolfatto były modyfikowane przez różnych autorów, którzy starali się inkorporować w ich strukturę dodatkowe mechanizmy ekonomiczne, w tym te jakie rozważamy w niniejszym artykule - endogeniczną destrukcję miejsc pracy w firmach (por. van Roye i Wesselbaum (2009)) i zmienianie zatrudnienia przez osoby pracujące (ang. on-the-job search, por. Krause i Lubik (2006)).

W równoległym nurcie literatury modele z frykcjami na rynku pracy konstruuje się w równowadze częściowej zakładającej zwykle, w ślad za oryginalną pracą Mortensena i Pissaridesa, egzogeniczny poziom wybranych zmiennych modelu np. stóp procentowych czy bezrobocia. W pracach z tego nurtu wprowadza się często także dodatkowe ograniczenia modelowanej struktury gospodarczej w postaci np. rezygnacji z wyboru między czasem wolnym a pracą po stronie konsumenta lub z obecności kapitału w funkcji produkcji. Dzięki tym uproszczeniom redukuje się liczbę zmiennych stanu w modelu, co umożliwia numeryczne wyznaczenie postaci funkcji wartości osoby pracującej, bezrobotnej czy firmy. Pozwalają one także na przyjęcie założenia o idiosynkratycznym charakterze części szoków dotyczących gospodarke i analizowanie silnej heterogeniczności ex-post podmiotów gospodarujących. W zbudowanych w ten sposób modelach takich autorów jak Hornstein et al. (2006) czy Hertweck (2010) możliwe jest analizowanie implikacji różnych postaci mechanizmu poszukiwań i dopasowań na rynku pracy dla rozkładów wynagrodzeń osób o tych samych obserwowanych statystykach (ang. frictional wage dispersion), różniących się między sobą indywidualną historią szoków w okresie zatrudnienia.

Rozwiązywane metodą perturbacyjną modele DSGE nie dają bezpośrednio takiej możliwości gdyż tworzące je problemy optymalizacyjne muszą zawierać równania w postaci stricte rekurencyjnej, w której wartość danej zmiennej w chwili t jest definiowana przez wielkości znane w tym okresie i wartość oczekiwaną skończonego zbioru zmiennych z okresu następnego. Oznacza to, że uwzględnianie zaburzeń dotyczących niezależnie od siebie różne jednostki możliwe jest w modelach DSGE jedynie w wypadku problemów, które mają reprezentację bezpośrednią (tj. wyrażoną explicite równaniem wiążącym zmienne z okresu bieżącego i przeszłości) lub rekurencyjną. Zawęża to spektrum możliwości do relatywnie ograniczonego zbioru przypadków takich jak np. kontrakty cenowe zaproponowane przez Calvo (1983). W wielu zagadnieniach wymagających uwzględniania heterogeniczności ex-post gospodarstw domowych lub firm nie jest jednak możliwe zdefiniowanie odpowiednich problemów decyzyjnych w sposób jednocześnie wiarygodny ekonomicznie i umożliwiający ich redukcję do formy rekurencyjnej. W rezultacie muszą być one albo wykluczone z horyzontu zainteresowania modeli DSGE, albo potraktowane w sposób uproszczony np. poprzez szczególną specyfikację procesów stochastycznych wbudowanych

w model. Dotyczy to w szczególności, będących przedmiotem tej pracy, problemów modelowania przepływów zatrudnienie-zatrudnienie i endogenizacji destrukcji miejsc pracy w firmach. W ich wypadku uwzględnienie idiosynkratycznych zaburzeń zmieniających cechy zawartych w przeszłości kontraktów zatrudnieniowych wydaje się być naturalnym mechanizmem ekonomicznym skłaniającym część pracowników do szukania nowego zatrudnienia, a część pracodawców do zwalniania z różną intensywnością w różnych fazach cyklu koniunkturalnego. Wedle naszej najlepszej wiedzy wszyscy autorzy zajmujący się do tej pory modelowaniem endogenicznej destrukcji lub on-the-job search, w obrębie metodologii DSGE, aby móc wyznaczyć rozwiązanie swoich modeli wprowadzali do nich odpowiednio silne założenia uproszczające. I tak np. występujące w modelu van Roye'a i Wesselbauma (2009) idiosynkratyczne procesy stochastyczne sterujące indywidualną produktywnością są procesami bez pamięci o rozkładzie lognormalnym. Umożliwia to analityczne obliczenie wartości oczekiwanych niezbędnych do uzyskania zamkniętych, rekurencyjnych formuł w problemach decyzyjnych pracowników i firm, a tą drogą wyznaczenie rozwiązania perturbacyjnego w modelu. Z kolei, Krause i Lubik (2006) w modelu implementującym przepływy zatrudnienie - zatrudnienie uciekają się do wprowadzenia uproszczonego podziału na dobre i złe sektory gospodarki, dzięki któremu zarówno bezrobotni mają motywację do podejmowania pracy w przedsiębiorstwach oferujących niższe płace, jak i ich pracownicy szukają jej nadal licząc na zatrudnienie w sektorze o wyższych wynagrodzeniach. Modelują więc oni mechanizmu on-the-job search poprzez rozwiązanie sztucznej heterogeniczności ex-ante.

W niniejszym artykule wskazujemy jak rozszerzyć zakres stosowalności modeli DSGE o możliwość analizowania nietrywialnej heterogeniczności ex-post podmiotów gospodarujących. W tym celu konstruujemy w ślad za Merz (1995) model realnego cyklu koniunkturalnego wyposażony w dodatkowe frykcje na rynku pracy zgodne z modelem poszukiwań i dopasowań i symetrycznymi negocjacjami płacowymi typu Nasha (1953). Podobnie jak w innych modelach tego typu podstawową grupą osób poszukujących pracy są osoby bezrobotne, których część znajduje ją napotykając niezapełniony wakat w firmie i podejmując negocjacje płacowe. W chwili zawarcia kontraktu ujawniany jest losowy poziom produktywności, który w następnych okresach może podlegać modyfikacji w ślad za zmieniającą się indywidualną produktywnością pracownika na danym stanowisku pracy. Dopuszczamy by w modelowanej gospodarce, obok agregatowych szoków technologicznych, występowały idiosynkratyczne zaburzenia zmieniające efektywność pracy poszczególnych osób. Jej poziom ewoluuje przy tym w zgodzie z geometrycznym procesem błędzenia losowego, tak, że u części zatrudnionych dochodzi z czasem do wzrostu, a u części do spadku wydajności w porównaniu z odnotowaną w chwili zawarcia kontraktu. Jednostki których produktywność spadnie poniżej pewnego, określanego endogenicznie, poziomu progowego są zwalniane przez firmy. Jednocześnie pracujący, którzy zmieniają pracodawcę mogą liczyć na wzrost własnej produktywności w większym stopniu niż gdyby pozostawali na starym miejscu pracy. Skłania to część z nich do podjęcia wysiłku poszukiwania nowego zatrudnienia jeszcze w czasie obowiązywania dotychczasowego kontraktu. Oznacza to, że w modelu występuje zarówno endogeniczna destrukcja miejsc pracy jak i mechanizm on-the-job search, co jest wedle naszej wiedzy pierwszą taką próbą w wypadku modeli równowagi ogólnej. Drugą cechą wyróżniającą prezentowany model od innych znanych nam z literatury modeli DSGE jest uwzględnienie w nim nietrywialnej heterogeniczności ex-post osób pracujących pod względem poziomu ich produktywności, a co za tym idzie także ciągłego poziomu płac. Zagadnienie to rozpatrywane było przez Hornsteina et al. (2006) oraz Hertwecka (2010), których modele są jednak zawężone do rynku pracy i przyjmują wiele daleko idących uprosz-

czeń niezbędnych do wyznaczenia rozwiązania. Hornstein et al. (2006) zakładają np. że umowy o pracę są jednookresowe a płace pracowników są losowane z jednakowego, znanego z góry rozkładu w każdym okresie przy egzogenicznym koszcie alternatywnym w postaci stopy procentowej. Z kolei Hertweck przyjmuje m.in. bardzo uproszczoną postać funkcji produkcji, a co za tym idzie brak związku między zatrudnieniem a poziomem produktu i konsumpcji. Jednocześnie w jego modelu produktywność każdego pracownika jest stała przez cały okres trwania kontraktu.

W niniejszym artykule pokazujemy, że nie jest konieczne uciekanie się do tych uproszczeń tj. możliwe jest analizowanie dynamicznych, stochastycznych modeli równowagi ogólnej z bogatą strukturą niedoskonałości rynkowych, a jednocześnie wyposażonych w nietrywialną heterogenizację ex-post podmiotów ekonomicznych. Proponujemy sposób pokonania dwóch podstawowych barier jakie utrudniają uwzględnianie szoków idiosynkratycznych w ramach metodologii DSGE. Pierwszą z nich jest konieczność wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych złożonych wyrażeń algebraicznych przy niestandardowych rozkładach prawdopodobieństwa. Drugą ciągły charakter przestrzeni na której określone są odpowiednie funkcje wartości i polityki tj. np. niewystępowanie w modelu jednej płacy tylko pełnego rozkładu wynagrodzeń osób o różnych indywidualnych poziomach produktywności. Główną ideą algorytmu jest odpowiednie aproksymowanie wszystkich zależnych od idiosynkratycznych zaburzeń funkcji występujących w modelu i numeryczne obliczenie ich wartości oczekiwanych względem odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa. Pozwala to na zredukowanie równań definiujących odpowiednie problemy decyzyjne do skończonego zbioru zmiennych losowych, a tym samym umożliwia rozwiązanie całego modelu klasyczną metodą perturbacyjną Judda (1993). Pierwszym krokiem zaproponowanego algorytmu jest aproksymacja wielomianami Chebysheva funkcji zależnych od indywidualnego poziomu produktywności pracowników. Dotyczy to w szczególności relacji między indywidualnym wynagrodzeniem a produktywnością, a także relacji między produktywnością a liczbą ofert pracy wysyłanych przez osoby zatrudnione. Aproksymowane są także funkcje wartości dla firmy i (pośrednio) pracownika oraz rozkłady prawdopodobieństwa występujące w modelu. Wagi aproksymacji wyznaczone są metodą kolokacji z węzłami Gaussa-Lobatto. Drugą składową zastosowanego algorytmu jest numeryczne całkowanie metodą kwadraturą Clenshaw-Curtis'a zastosowane do wyznaczenia wartości oczekiwanych występujących w problemach decyzyjnych firmy i zatrudnionego oraz negocjacjach płacowych.

Od strony empirycznej artykuł wpisuje się w dyskusję wokół potencjału modeli poszukiwań i dopasowań do odzwierciedlenia podstawowych własności cyklicznych rynku pracy. Jak zaobserwowali m.in. Hall (2005) i Shimer (2005) klasyczny model Mortensena i Pissaridesa (1994) spisuje się pod tym względem źle, generując zarówno bardzo niską wariancję stopy bezrobocia oraz wakatów, jak i ich dodatnią wzajemną korelację. Nie jest on więc w stanie wytłumaczyć takich obserwacji jak ujemnie nachylona krzywa Beveridge'a oraz duża zmienność współczynnika zwartości rynku pracy. Podstawową przyczyną tych słabości podstawowego modelu poszukiwań i dopasowań jest to, że firmy konfrontując się ze ograniczoną liczbą poszukujących zatrudnienia osób bezrobotnych mają niewielką zachętę do otwierania dużej liczby wakatów w odpowiedzi na pozytywny szok technologiczny. Spodziewają się bowiem, że zwiększenie zainteresowania poszukiwaniem pracy po wystąpieniu dodatniego szoku technologicznego, szybko wygaśnie. Wprowadzenie mechanizmu on-the-job search do modeli poszukiwań i dopasowań poszerza zbiór osób poszukujących pracy o osoby pracujące, stabilizując liczbę wysyłanych ofert pracy w cyklu koniunkturalnym. Zmniejsza to średni czas oczekiwania na zapelnienie wakatów, a więc i koszt ponoszony z tego tytułu przez firmy. Z tego powodu część autorów (por. Krause i

Lubik (2006), Hertweck (2010)) właśnie w tym mechanizmie upatruje źródła dużej zmienności wakatów i bezrobocia w przekroju cyklu koniunkturalnego. Relatywnie duża skala przepływów zatrudnienie-zatrudnienie, sięgająca 2.6proc. osób zatrudnionych znajduje przy tym poparcie w danych (Fallick and Fleischman (2004)), co dodatkowo przemawia za tym mechanizmem jako jedną z możliwych przyczyn wysokiej zmienności wakatów w cyklu koniunkturalnym. Obserwacją empiryczną, na którą odpowiadamy w artykule jest kwestia relatywnej roli jaką dla epizodów wzrostu bezrobocia odgrywają fluktuacje stóp zwolnień i zatrudnień w firmach. Zgodnie z obserwacjami Halla (2005) i Shimera (2007) za wahania stopy bezrobocia w USA odpowiadają przede wszystkim zmiany w skłonności firm do zatrudniania. Jednak, jak wskazują Elsby et al.(2009) prawidłowość ta zachodzi tylko dla USA, podczas gdy w Europie wkład do zmienności bezrobocia wnoszą zarówno wahania intensywności zatrudniania jak i zwalniania. Pogląd ten wspiera także Lewandowski (2011) wskazując, że w Unii Europejskiej intensywność zwolnień rośnie bardzo silnie w okresach kryzysowych mimo, że pozostaje relatywnie stała w pozostałych fazach cyklu. Wskazuje to na potencjalne znaczenie jakie może mieć endogeniczna destrukcja miejsc pracy dla wyjaśnienia krótkotrwałych epizodów wzrostu bezrobocia w Europie.

Artykuł jest zorganizowany następująco. W sekcji 2 przedstawiamy strukturę modelu. Sekcja 3 omawia zaproponowaną numeryczną procedurę wyznaczania rozwiązania. Sekcja 4 opisuje procedurę kalibracji modelu. W sekcji 5 omawiamy główne własności modelu. Sekcja 6 podsumowuje.

2 Model

2.1 Gospodarstwo Domowe

Modelowana gospodarka zaludniona jest przez continuum jednostek rozłożonych jednostajnie na odcinku o jednostkowej długości. Formują one reprezentatywne gospodarstwo domowe maksymalizujące w chwili zero wartość oczekiwaną zdyskontowanego strumienia użyteczności z konsumpcji, \tilde{C}_t , zadaną rekursywnie przez

$$U_t = \frac{\tilde{C}_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} + \beta E_t\{U_{t+1}\}$$

gdzie β oznacza subiektywną stopę preferencji czasowej, zaś σ określa międzyokresową elastyczność substytucji między konsumpcją dziś a konsumpcją jutro. W okresie t członek $i \in [0, 1]$ gospodarstwa domowego oferuje $N_t^i \in \{0, 1\}$ jednostek pracy za które otrzymuje płacę W_t^i . Dochody z pracy razem z zyskami Π_t jakie gospodarstwo otrzymuje od firm, których jest właścicielem, są wydatkowane na konsumpcję dóbr rynkowych C_t , tworząc ograniczenie budżetowe

$$C_t = \int_0^1 W_t^i N_t^i di + \Pi_t$$

Poza dobrami rynkowymi, źródłem użyteczności gospodarstwa domowego są dobra nierynkowe wytwarzane w domu przez niepracujących członków gospodarstwa domowego. Zakładamy, że są one wzajemnie doskonale substytucyjne, a tym samym

$$\tilde{C}_t = C_t + b \times \int_0^1 (1 - N_t^i) di$$

gdzie b określa efektywność produkcji dóbr domowych.

2.2 Firmy

Reprezentatywna firma maksymalizuje wartość oczekiwaną zdyskontowanego na chwilę zero strumienia przyszłych zysków $\tilde{\Pi}_t$, zadaną rekursywnym równaniem

$$\tilde{\Pi}_t = \Pi_t + E_t\{\Lambda_{t+1} \tilde{\Pi}_{t+1}\}$$

gdzie $\Lambda_t = \beta \frac{\lambda_t}{\lambda_{t-1}}$ jest czynnikiem dyskontującym (ang. pricing kernel) będącym pochodną krańcowej użyteczności gospodarstwa domowego z konsumpcji dóbr λ_t . Firma produkuje dobra, Y_t , wykorzystując do tego celu pracę oraz kapitał, który jest jednocześnie jej własnością, podejmując decyzje inwestycyjne I_t i osiągając niezerowe zyski. W celu zatrudnienia nowych pracowników przedsiębiorstwo otwiera, początkowo niezapełnione, wakaty, V_t , ponosząc jednostkowy koszt ϖ . Tym samym zysk chwilowy firmy jest dany przez

$$\Pi_t = Y_t - \int_0^1 W_t^i N_t^i di - I_t - \varpi V_t$$

Technologia produkcji dobra Y_t jest dana standardową funkcją Cobba-Douglassa zależną od poziomu zainstalowanego w okresie t kapitału oraz pracy

$$Y_t = A_t K_{t-1}^\alpha \tilde{N}_t^{1-\alpha}$$

gdzie A_t jest egzogenicznym poziomem technologii w okresie t , K_t jest zasobem zainstalowanego kapitału, zaś \tilde{N}_t oznacza efektywną liczbę jednostek pracy zaangażowanych w produkcję. Kapitał tworzony jest w wyniku standardowego procesu akumulacji

$$K_t = (1 - \delta)K_{t-1} + I_t$$

Całkowitzą liczbę pracujących N_t oraz efektywne zatrudnienie \tilde{N}_t definiujemy w naturalny sposób

$$N_t = \int_0^1 N_t^i di \quad \tilde{N}_t = \int_0^1 A^i \times N_t^i di \quad (1)$$

W modelu rozważamy przy tym heterogeniczność pracowników przyjmując, że każda zatrudniona osoba $i \in [0, 1]$ pracuje w okresie t z produktywnością $A_t^i = e^{a_t^i}$, gdzie a_t^i jest zależne od a_{t-1}^i oraz realizacji idiosynkratycznego szoku produktywności η_t^i zgodnie z równaniem

$$a_t^i = a_{t-1}^i + \eta_t^i$$

gdzie $\eta^i \sim N(0, \sigma_A)$ jest i.i.d zmienną losową o rozkładzie normalnym. Tym samym poziom indywidualnej produktywności pracowników podlega geometrycznemu procesowi błędzenia losowego w trakcie obowiązywania umowy o pracę. W rezultacie efektywność części pracowników rośnie powyżej początkowego poziomu, a części wyraźnie się obniża. Po ujawnieniu się szoku do indywidualnej produktywności firmy oraz pracownicy mogą zdecydować o rozwiązaniu stosunku pracy oraz negocjując płacę na dany okres. Część stanowisk pracy ulega także egzogenicznej destrukcji.

2.3 Rynek pracy

Rynek pracy cechuje się, podobnie jak u Merz (1995) niedoskonałością związaną z mechanizmem poszukiwań i dopasowań oraz negocjacjami płacowymi typu Nasha. Otwiera się on na początku okresu t zanim firmy oraz pracownicy dokonają destrukcji miejsc pracy. Zatrudnienia poszukiwać mogą zarówno osoby niepracujące (bezrobotne) jak i mające pracę, a tym samym w modelu implementujemy mechanizm *on-the-job search*. W wypadku tej drugiej grupy o intensywności poszukiwania pracy w okresie t przez osobę i decyduje jej indywidualna produktywność A_t^i . W chwili gdy dany pracownik znajdzie nowego pracodawcę jego stare stanowisko pracy ulega destrukcji. Oznaczmy przez \tilde{Q}_t całkowitą liczbę ofert pracy zgłoszoną przez osoby zatrudnione poszukujące pracy. Z kolei symbolem $U_t = 1 - N_t$ określamy liczbę osób bezrobotnych, z których każda poszukuje pracy z jednakową intensywnością e_t , którą interpretujemy jako liczbę ofert pracy wysyłanych w okresie t przez jednego bezrobotnego. Tym samym całkowita liczba ofert pracy wysyłanych na początku okresu t wynosi

$$O_t = \tilde{Q}_t + e_t \times U_t$$

Liczba nowych miejsc pracy, M_t jest zadana funkcją Cobba-Douglasa dopasowującą oferty zgłoszone przez osoby poszukujące pracy z wakatami otwartymi przez firmy, V_t w następujący sposób:

$$M_t = \Upsilon \times V_t^\mu O_t^{1-\mu}$$

gdzie Υ jest efektywnością technologii dopasowań. Zakładamy, że nowo zatrudnione osoby zostaną włączone w proces produkcji dopiero w następnym okresie. Prawdopodobieństwo zapelnienia wakatów, Ψ_t , prawdopodobieństwo znalezienia pracy, Φ_t , wynoszą odpowiednio

$$\Psi_t = \frac{M_t}{V_t} \qquad \Phi_t = \frac{M_t}{O_t}$$

Prawdopodobieństwa te są brane przez firmy i osoby poszukujące pracy jako dane. Poszukiwanie pracy wiąże się z kosztem $c_t^j(x)$, wyrażonym w jednostkach użyteczności i obniżającym, zdefiniowaną w dalszej części, satysfakcję jaką osoby niepracujące ($j = U$) lub zatrudnione $j = E$ czerpią ze swojego stanu na rynku pracy. Koszt ten jest funkcją podjętego wysiłku tj. liczby ofert pracy wysłanych w okresie t . W modelu zakładamy, że funkcja kosztów poszukiwania pracy $c_t^j(x)$ przyjmuje postać

$$c_t^j(x) = c_\alpha^j x^{c_\beta^j}$$

gdzie indeks $j \in \{E, U\}$ różnicuje parametry funkcji kosztów wśród osób zatrudnionych i bezrobotnych, co można uzasadnić innym kosztem alternatywnym czasu wolnego w wypadku obu kategorii osób. W obu wypadkach $(c_t^j)'(x) = c_\beta^j \frac{c_t^j(x)}{x}$. Parametry c_β^j oraz c_α^j definiują stacjonarną wartość wysiłku wkładanego w poszukiwane pracy i jego elastyczność w odpowiedzi na szoki ekonomiczne. Przy takiej strukturze rynku pracy liczba osób pracujących zmienia się zgodnie z równaniem

$$N_t = (1 - \rho)(1 - s_t) \times \left(N_{t-1} + \Phi_{t-1} e_{t-1} U_{t-1} \right) \quad (2)$$

gdzie s_t jest zagregowaną stopą endogenicznej destrukcji zdefiniowaną w dalszej części. Egzogeniczna destrukcja ρ gwarantuje, że rozkład indywidualnej produktywności pracowników jest dobrze określony.

2.4 Negocjacje płacowe

Oznaczmy przez $V_t^{E,i}$, V_t^U i $V_t^{F,i}$ odpowiednio: (i) wartość w jednostkach użyteczności gospodarstwa domowego jaką w chwili t ze swojej pracy czerpie i -ta osoba pracująca, (ii) wyrażoną także w jednostkach użyteczności satysfakcję jaką dla osoby bezrobotnej przynosi jej stan na rynku pracy oraz (iii) wartość dla firmy z zatrudnienia osoby $i \in [0, 1]$. Zmienne $V_t^{E,i}$, oraz $V_t^{F,i}$ zależą wyłącznie od indywidualnej produktywności pracy i -tego pracownika pod koniec okresu t , tj. od zmiennej a_t^i . Poziom produktywności jest cechą osób pracujących ulegającą zatarciu w chwili utraty pracy. Z tego względu V_t^U jest jednakowe dla wszystkich osób bezrobotnych (por. równanie (8)), podczas gdy $V_t^{E,i}$ i $V_t^{F,i}$ mogą się różnić u różnych osób pracujących. Niech $Q_t^i \geq 0$ oznacza liczbę ofert pracy zgłoszonych przez pracownika o indeksie i , wtedy $\Phi_t Q_t^i$ jest prawdopodobieństwem, że zmieni on dobrowolnie miejsce pracy pod warunkiem, że nie doszło do separacji z innego powodu. Zakładamy, że Q_t^i jest wyrażone w tych samych jednostkach co wysiłek poszukiwania pracy przez osoby bezrobotne e_t . Wtedy $c_t(Q_t^i)$ mierzy utratę całkowitej użyteczności rozpatrywanej osoby pracującej poniesioną w wyniku jej zaangażowania w proces poszukiwania nowego zatrudnienia. Niech zmienna $S_{t+1}^i \in \{0, 1\}$ przyjmuje wartość 1, jeżeli miejsce pracy i -tego pracownika nie zostało endogenicznie zniszczone oraz wartość zero w przeciwnym wypadku. W takim wypadku satysfakcja z pracy i -tej osoby zatrudnionej oraz wartość dla firmy z tego zatrudnienia dane są w okresie t rekurencyjnymi

zależnościami

$$\begin{aligned}
V_t^{E,i} &= \lambda_t W_t^i - c_t^E(Q_t^i) + \beta \Phi_t Q_t^i \times E_t \{ V_{t+1}^{E,i,0} - V_{t+1}^U \} + \beta E_t \{ V_{t+1}^U \} \\
&\quad + \beta (1 - \Phi_t Q_t^i) \times E_t \left\{ (1 - \rho) S_{t+1}^i \times (V_{t+1}^{E,i} - V_{t+1}^U) \right\} \\
V_t^{F,i} &= \lambda_t (X_t^i - W_t^i) + \beta (1 - \Phi_t Q_t^i) \times E_t \{ (1 - \rho) S_{t+1}^i \times V_{t+1}^{F,i} \}
\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie $V_{t+1}^{E,i,0}$, jest wartością z zatrudnienia, którą osoba i , czerpie z faktu znalezienia pracy w okresie t i jej podjęcia w okresie $t + 1$, zaś zmienna X_t^i określa krańcową produktywność efektywnej jednostki pracy i -tego pracownika, która jest brana przez firmę oraz pracownika jako dana i wynosi

$$X_t^i = A_t^i \times (1 - \alpha) \frac{Y_t}{N_t}$$

Równania (3) można zinterpretować w naturalny sposób. Wartość kontraktu zatrudnieniowego jest dla pracownika tym większa im większa jest różnica między użytecznością czerpaną z płacy a kosztem poszukiwania nowego zatrudnienia. Jednocześnie zwiększa ją zdyskontowana wartość oczekiwana potencjalnej nadwyżki wartości z zatrudnienia nad wartością czerpaną z bezrobocia biorąca pod uwagę to, czy pracownik utraci pracę, zmieni ją czy też pozostanie na dotychczasowym stanowisku. Podobnie w wypadku firmy, wartość umowy o pracę rośnie wraz z tym im większa jest nadwyżka jego krańcowej produktywności nad wypłacaną mu płacą oraz im większa jest (po zdyskontowaniu) przyszła oczekiwana wartość tego kontraktu po uwzględnieniu korekty o prawdopodobieństwo rozwiązania umowy z przyczyn egzogenicznych, przyczyn leżących po stronie firmy lub ze względu na zmianę pracodawcy przez osobę pracującą.

Wartości kontraktu zatrudnieniowego dla firmy i pracownika są brane pod uwagę w procesie negocjacji wynagrodzeń. Podobnie jak w standardowym modelu RBC uzupełnionym o mechanizm poszukiwań i dopasowań na rynku pracy zakładamy, że płaca W_t^i pracownika o produktywności A_t^i jest wyznaczona zgodnie z mechanizmem indywidualnych negocjacji Nasha podejmowanych przez firmy i pracowników w każdym okresie t

$$W_t^i = \arg \max_{W_t^i} (V_t^{E,i} - V_t^U)^\nu \times (V_t^{F,i})^{1-\nu}$$

pod warunkiem możliwości realizacji postaci $V_t^{E,i} - V_t^U \geq 0$, $V_t^{F,i} \geq 0$. Implikuje to

$$V_t^{F,i} = \frac{1 - \nu}{\nu} (V_t^{E,i} - V_t^U) \tag{4}$$

tym samym $V_t^{F,i} < 0 \Leftrightarrow V_t^{E,i} - V_t^U < 0$ i warunek możliwości realizacji jest spełniony jeżeli tylko $V_t^{E,i} \geq 0$. Równanie 4 oraz dynamiki $V_t^{E,i}$ i $V_t^{F,i}$ pozwalają nam na wyrażenie płacy w następującej formule

$$\begin{aligned}
W_t^i &= \nu X_t^i + \frac{1 - \nu}{\lambda_t} \times c_t^E(Q_t^i) + \frac{1 - \nu}{\lambda_t} \times \left(V_t^U - \beta E_t \{ V_{t+1}^U \} \right) \\
&\quad - \beta (1 - \nu) \frac{\Phi_t Q_t^i}{\lambda_t} \times E_t \{ V_{t+1}^{E,i,0} - V_{t+1}^U \}
\end{aligned} \tag{5}$$

Zauważmy, że wartość z pracy dla i -tego pracownika oraz wartość z i -tego pracownika dla firmy zależą wyłącznie od indywidualnej produktywności pracownika. Tym samym wynegocjowana płaca W_t^i , liczba ofert pracy zgłoszona przez osobę zatrudnioną, Q_t^i , oraz endogeniczna destrukcja miejsca pracy S_t^i także zależą jedynie od logarytmu poziomu indywidualnej produktywności a_t^i oraz agregatów ekonomicznych.

Tym samym, przy danym stanie zmiennych makroekonomicznych, możemy zdefiniować funkcje wartości dla pracownika, $V^E(a)$, oraz firmy $V^F(a)$ których argumentem jest a . Zajmujemy się tym w następnej sekcji.

2.5 Funkcje wartości

Oznaczmy przez $W_t(a)$, $Q_t(a)$, $S_t(a)$ i $X_t(a)$ funkcyjne zależności między płacą, liczbą wysyłanych ofert, endogeniczną destrukcją miejsc pracy i krańcową produktywnością efektywnej jednostki pracy osoby o logarytmie poziomu indywidualnej produktywności a . Wymagamy przy tym aby

$$\begin{aligned} W_t^i &= W_t(a_t^i) & Q_t^i &= Q_t(a_t^i) \\ S_t^i &= S_t(a_t^i) & X_t^i &= X_t(a_t^i) \end{aligned}$$

Zdefiniujmy funkcje $V^E(a)$ oraz $V^F(a)$ w ten sposób aby

$$V_t^{E,i} = V_t^E(a_t^i) \quad V_t^{F,i} = V_t^F(a_t^i) \quad (6)$$

Niech zmienna losowa $a'(a, \eta)$ określa ewolucję logarytmu produktywności osoby nie zmieniającej swojego miejsca pracy, natomiast $\gamma'(a, \eta)$ ewolucję logarytmu produktywności osoby, która takiej zmiany dokonuje. Poszukiwanie nowej pracy przez osoby zatrudnione wymaga aby pracownik spodziewał się wzrostu wynagrodzenia przy jej zmianie. Dlatego naturalnym założeniem byłoby aby $\gamma'(a, \eta) > a + \eta$. Formalnie rzecz biorąc, zakładamy, że $a' = a'(a, \eta)$ oraz $\gamma' = \gamma'(a, \eta)$ są zmiennymi losowymi spełniającymi

$$a' = a + \eta \quad \gamma' = g(a) + \eta.$$

gdzie $\eta \sim N(0, \sigma_A)$ jest czysto losowym zaburzeniem, zaś deterministyczna funkcja $g(a)$ definiuje niestochastyczny składnik indywidualnej produktywności osoby zmieniającej pracę. W obu wypadkach proces stochastyczny regulujący ewolucję indywidualnej wydajności pracownika jest geometrycznym procesem błędzenia losowego. Funkcje V_t^E i V_t^F definiujemy następująco

$$\begin{aligned} V_t^E(a) &= \lambda_t W_t(a) - c_t^E(Q_t(a)) + \beta E_t V_{t+1}^U + \beta \times E_t \left\{ V_{t+1}^{E,0}(a') - V_{t+1}^U \middle| a \right\} \\ &\quad + \beta \Phi_t Q_t(a) E_t \left\{ V_{t+1}^{E,0}(\gamma') - V_{t+1}^{E,0}(a') \middle| a \right\} \\ V_t^F(a) &= \lambda_t (X_t(a) - W_t(a)) \\ &\quad + \beta (1 - \Phi_t Q_t(a)) E_t \left\{ (1 - \rho) S_{t+1}(a') V_{t+1}^F(a') \middle| a \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie dla $x \in \{a', \gamma'\}$

$$V_t^{E,0}(x) = (1 - \rho) S_t(x) \times (V_t^E(x) - V_t^U) + V_t^U$$

Dokonując odpowiednich podstawień nietrudno sprawdzić, że tak zdefiniowane funkcje wartości $V_t^E(a)$ i $V_t^F(a)$ spełniają warunki (6). Ich interpretacja ekonomiczna jest także taka sama jak równań (3). O ile jednak zmienne losowe $V_t^{E,i}$, $V_t^{F,i}$ są zdefiniowane tylko gdy miejsce pracy i -tego pracownika nie zostało zniszczone w okresie t , to funkcje wartości możemy zdefiniować dla dowolnego a .

Przyjmujemy upraszczająco, że w wypadku osób pracujących, które stały się bezrobotne zatarciu ulegają specyficzne umiejętności zgromadzone w okresie zatrudnienia. Oznacza to, że nowo zatrudnieni bezrobotni w okresie t cechują się losowo

określona indywidualną produktywnością $A^0 = \exp(a^0)$ gdzie $a^0 \sim N(0, \sigma_A)$. Wartość bezrobotnego V_t^U nie zależy więc od poziomu jego produktywności w czasie gdy był zatrudniony, lecz jedynie od nadwyżki jaką produkcja domowa w chwili t przynosi nad kosztem poszukiwania pracy $c_t(e_t)$ oraz od zdyskontowanej na moment t wartości oczekiwanej przyszłego stanu na rynku pracy - bezrobocia V_{t+1}^U i zatrudnienia $V_{t+1}^{E,0}(a^0)$. Spełnia ona zatem następującą, rekursywną zależność funkcyjną

$$V_t^U = \lambda_t b - c_t^U(e_t) + \beta(1 - \Phi_t e_t) \times E_t\{V_{t+1}^U\} + \beta\Phi_t e_t \times E_t\{V_{t+1}^{E,0}(a^0)\} \quad (8)$$

gdzie $\Phi_t e_t$ jest prawdopodobieństwem znalezienia pracy przez bezrobotnego poszukującego jej z intensywnością e_t . Podobnie wartość z ustanowienia wakatów w chwili t przez firmę oznaczona symbolem J_t , wynosi

$$J_t = -\lambda_t \varpi + \beta\Psi_t E_t\left\{(1 - \rho)S_{t+1}(\omega) \times V_{t+1}^F(\omega)\right\} \quad (9)$$

gdzie ω jest zmienną losową, której zdefiniowany dalej (por. równanie (16)) rozkład, zadany jest funkcją gęstości $dH_{t+1}(\omega)$ odpowiadającą gęstości rozkładu prawdopodobieństwa indywidualnej produktywności osób nowo zatrudnionych w okresie $t+1$, po realizacji szoku produktywności pracy. Optymalność ustalenia liczby wakatów oraz warunek braku barier wejścia firm wymaga

$$J_t = 0 \quad (10)$$

Oznacza to, że w optimum jednostkowy koszt otwarcia wakatów ϖ jest równy zdyskontowanej na chwilę bieżącą oczekiwanej wartości jaką z punktu widzenia firmy przyniesie zatrudnienie nowych pracowników. Przy obliczaniu tej wartości oczekiwanej brany jest pod uwagę, zdefiniowany dalej, rozkład produktywności poszczególnych osób $dH_{t+1}(\omega)$ oraz prawdopodobieństwo zapełnienia wakatów Ψ_t .

2.6 Endogeniczna destrukcja

Optymalność decyzji firmy o zwolnieniu pracownika o produktywności a wymaga tego, aby $S_t(a) = 0$ jeżeli $V_t^F(a) \leq 0$ oraz $S_t(a) = 1$ w przeciwnym wypadku. Pracownik nie dokona destrukcji miejsca pracy jeżeli nie zrobi tego firma. Zakładamy, że $V_t^F(a)$ jest funkcją rosnącą względem a . Założenie to jest weryfikowane numerycznie. Wtedy

$$S_t(a) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } a \leq \bar{a}_t; \\ 1, & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (11)$$

gdzie \bar{a}_t jest granicznym poziomem indywidualnej produktywności spełniającym $V_t^F(\bar{a}_t) = 0$. Wykorzystując równanie (11) determinujące postać funkcji endogenicznej destrukcji miejsc pracy w firmach możemy wyrazić w sposób bardziej bezpośredni niż w równaniu (7) wartość jaką firma uzyskuje z zatrudnienia nowego pracownika o produktywności a

$$V_t^F(a) = \lambda_t(X_t(a) - W_t(a)) + \beta(1 - \rho)(1 - \Phi_t Q_t(a)) \times \tilde{V}_t^F(a)$$

gdzie

$$\tilde{V}_t^F(a) = E_t\left\{\int_{\bar{a}_{t+1}}^{\infty} V_{t+1}^F(a') dF(a'; a)\right\} \quad (12)$$

zaś $dF(a'; a)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej a' danej przez $a' = a + \eta$, $\eta \sim N(0, \sigma_A)$, tj.

$$dF(x; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} \times e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_A^2}}$$

Podobnie, korzystając z definicji (12), równania (4) oraz wprowadzonych w kolejnej sekcji zależności (14) wiążących krańcowe koszty otwarcia wakatów z oczekiwaną nadwyżką z faktu podjęcia pracy przez osobę bezrobotną, można uprościć wyrażenia (7) i (8) uzyskując następujące równania definiujące funkcje wartości $V_t^E(a)$ i V_t^U

$$\begin{aligned} V_t^E(a) &= \lambda_t W_t(a) + (c_\beta^E - 1) \times c_t^E(Q_t(a)) + \beta E_t V_{t+1}^U + \beta(1 - \rho) \times \frac{\nu}{1 - \nu} \tilde{V}_t^F(a) \\ V_t^U &= \lambda_t \times b + (c_\beta^U - 1) \times c_t^U(e_t) + \beta \times E_t \{V_{t+1}^U\} \end{aligned}$$

Na koniec, wykorzystanie równań (8), (4) i (6) pozwala warunek na optymalną płacę (5) zapisać jako

$$\begin{aligned} W_t(a) &= \left[\nu X_t(a) + (1 - \nu) \times b \right] - \left[\nu \frac{\beta(1 - \rho)}{\lambda_t} \times \Phi_t Q_t(a) \times \tilde{V}_t^F(a) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \frac{1}{\lambda_t} \times \left((c_\beta^E - 1) c_t^E(Q_t(a)) - (c_\beta^U - 1) c_t^U(e_t) \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Równanie (13) ma naturalną interpretację. Wynagrodzenie pracownika o wydajności $A(a) = e^a$ jest po pierwsze tym większe im większa jest średnia ważona siłą przetargową pracownika z krańcowej produktywności na rynku $X_t(a)$ i w produkcji domowej b . Relatywna rola pracy rynkowej i produkcji domowej w determinowaniu płacy zależy od siły przetargowej pracowników ν . Im jest ona większa tym opcja zewnętrzna w postaci produkcji dóbr nierynkowych ma mniejsze znaczenie. Na płacę oddziałuje za to negatywnie średnia ważona siłą przetargową z nadwyżki kosztu poszukiwania pracy przez osobę pracującą nad kosztem jej szukania jako osoba bezrobotna $\left(\frac{1}{\lambda_t} \times \left((c_\beta^E - 1) c_t^E(Q_t(a)) - (c_\beta^U - 1) c_t^U(e_t) \right) \right)$ oraz ze straty wartości jakiej może się spodziewać firma w związku ze spodziewanymi zwolnieniami czy to na skutek naturalnego procesu destrukcji miejsc pracy czy też zjawiska on-the-job search $\frac{(1-\rho)}{\lambda_t} \times \Phi_t Q_t(a) \times \tilde{V}_t^F(a)$. Płacę obniża więc relatywnie wysoki koszt jej poszukiwania przez zatrudnionych i wysokie prawdopodobieństwo jej znalezienia przez osoby już zatrudnione. Dzieje się tak dlatego, że pracownicy są skłonni akceptować niższe wynagrodzenia jeśli koszt zmiany pracy jest wysoki, zaś pracodawcy ograniczają wzrost wynagrodzeń jeśli mogą spodziewać się ceteris paribus znacznego odpływu pracowników.

2.7 Intensywność poszukiwania pracy

Osoby bezrobotne będą zwiększały intensywność poszukiwania pracy e_t do chwili, gdy $\frac{\partial V_t^U}{\partial e}(e_t) = 0$. Podobnie osoby pracujące o produktywności a będą wysyłały nowe oferty pracy aż do momentu w którym $\frac{\partial V_t^E}{\partial Q(a)}(a) = 0$. Oznacza to, że warunki na optymalny poziom e_t i $Q_t(a)$ można otrzymać różniczkując prawą stronę równań (7) i (8) odpowiednio względem $Q_t(a)$ i e_t , a następnie przyrównując ją do zera. Uzyskujemy wtedy

$$\begin{aligned} (c_t^U)'(e_t) &= \beta \Phi_t \times E_t \{V_{t+1}^{E,0}(a^0) - V_{t+1}^U\} \\ (c_t^E)'(Q_t(a)) &= \beta \Phi_t E_t \left\{ V_{t+1}^{E,0}(\gamma') - V_{t+1}^{E,0}(a') \Big| a \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

ponieważ $V_{t+1}^{E,0}(x)$ jest funkcją rosnącą, to z dokładnością do zbioru miary zero $V_{t+1}^{E,0}(\gamma') - V_{t+1}^{E,0}(a') > 0 \iff \gamma' > a'$ a więc wtedy gdy $g(a) > a$. Oznacza to, że pracujący są skłonni do poszukiwania pracy jeśli $g(a) > a$. W przeciwnym wypadku $Q_t(a) = 0$. Zauważmy ponadto, że wykorzystując definicję \tilde{V}_t^F można uprościć wyrażenia (14) uzyskując

$$\begin{aligned} (c_t^U)'(e_t) &= \frac{\nu}{1-\nu} \times \beta(1-\rho)\Phi_t \times \tilde{V}_t^F(0) \\ (c_t^E)'(Q_t(a)) &= \frac{\nu}{1-\nu} \times \beta(1-\rho)\Phi_t \times \left(\tilde{V}_t^F(g(a)) - \tilde{V}_t^F(a) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

a tym samym, podobnie jak w wypadku funkcji wartości V_t^F , V_t^E oraz V_t^U do wyznaczenia liczby ofert pracy wysyłanych przez osoby bezrobotne i zatrudnione wystarcza znajomość postaci funkcji \tilde{V}_t^F . Wyznaczamy ją numerycznie w algorytmie opisanym w sekcji 3.

2.8 Agregacja

Duża heterogeniczność osób pracujących w modelu, różniących się między sobą poziomem indywidualnej produktywności, implikuje konieczność wyznaczenia wielkości zagregowanych, odgrywających w modelu rolę ekonomiczną tj. pozwalających wyznaczyć poziom brakujących zmiennych w tym m.in. produkcji Y_t , czy liczby nowozapełnionych miejsc pracy M_t oraz innych zmiennych wobec nich pochodnych. Poszukiwanymi agregatami są liczba osób pracujących N_t , efektywny nakład pracy \tilde{N}_t , zagregowane prawdopodobieństwo endogenicznej destrukcji s_t , prawdopodobieństwo zapelnienia wakatów Ψ_t , całkowita liczba ofert pracy wysyłanych przez zatrudnionych \tilde{Q}_t oraz łączne wydatki na płace $W_t N_t$, gdzie W_t jest przeciętnym poziomem wynagrodzeń w gospodarce. Załóżmy chwilowo, że znamy dwa podstawowe rozkłady prawdopodobieństwa pozwalające na wyznaczenie poszukiwanych agregatów: (i) rozkład indywidualnej produktywności $dG_t(a)$ przed dokonaniem endogenicznej i egzogenicznej destrukcji miejsc pracy oraz (ii) rozkład produktywności nowopowstałych miejsc pracy $dH_t(a)$. Ich wyznaczenie odbywa się numerycznie na podstawie wzorów i procedury aproksymacyjnej opisanej w sekcjach 2.9 i 3. Zagregowane koszty pracy spełniają

$$W_t N_t \equiv \int_0^1 W_t^i N_t^i di \quad W_t = \frac{1}{1-s_t} \times \int_{\bar{a}_t}^{\infty} W_t(a) dG_t(a)$$

Efektywna liczba jednostek pracy oferowana w okresie t , dana przez (1), wynosi

$$\tilde{N}_t = \frac{N_t}{1-s_t} \times \int_{\bar{a}_t}^{\infty} e^a dG_t(a)$$

Równanie (2) wyznacza dynamikę liczby pracujących. Zgodnie z definicją rozkładu indywidualnej produktywności $dG_t(a)$, zagregowane prawdopodobieństwo endogenicznej destrukcji, s_t spełnia

$$s_t = 1 - \int_{\bar{a}_t}^{\infty} dG_t(a)$$

Liczba ofert pracy złożona przez osoby zatrudnione, poszukujących pracy wynosi

$$\tilde{Q}_t = \frac{N_t}{1-s_t} \times \int_{\bar{a}_t}^{\infty} Q_t(a) dG_t(a)$$

Mamy też $U_t = 1 - N_t$. Warunek optymalności liczby wakatów, (10) przyjmuje postać

$$\lambda_t \varpi = \beta(1 - \rho) \Psi_t \times E_t \left\{ \int_{\bar{a}_{t+1}}^{\infty} V_{t+1}^F(x) dH_{t+1}(x) \right\}$$

definiuje on prawdopodobieństwo zapelnienia wakatów Ψ_t . Wartości wszystkich agregatów wyznaczane są numerycznie w sposób opisany w sekcji 3.

2.9 Rozkłady produktywności $dG_t(a)$ i $dH_t(a)$ oraz ich dynamika

W celu domknięcia modelu pozostało jeszcze wyznaczenie dynamiki rozkładu indywidualnej produktywności osób zatrudnionych na początku okresu t , $dG_t(a)$, a także powiązanego z nim rozkładu produktywności nowopowstałych miejsc pracy $dH_t(a)$. W okresie $t - 1$ następuje endogeniczna destrukcja miejsc pracy, których produktywność jest mniejsza niż \bar{a}_{t-1} oraz egzogeniczna destrukcja miejsc pracy z prawdopodobieństwem ρ niezależna od produktywności osoby. Dodatkowo pod koniec okresu $t - 1$ część osób zmienia swoje miejsce pracy w wyniku *on-the-job search*. Na początku okresu t miejsca pracy, które przetrwały destrukcję oraz te, które nie zostały opuszczone przez pracowników zmieniających pracę dostają losowego szoku produktywności. Oznaczmy przez $dG_t^1(a)$ gęstość prawdopodobieństwa rozkładu produktywności tych miejsc pracy. Wynosi ono

$$dG_t^1(x) = \frac{1}{\tilde{s}_{t-1}} \int_{\bar{a}_{t-1}}^{\infty} \left(dG_{t-1}(y) - dR_{t-1}(y) \right) \times dF(y; x) dy,$$

gdzie \tilde{s}_{t-1} jest zmienną, która normalizuje rozkład produktywności osób, które pracowały w okresie $t - 1$ i nie zmieniły pracy.

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{t-1} &= \int_{\bar{a}_{t-1}}^{\infty} \left(1 - \Phi_{t-1} Q_{t-1}(z) \right) dG_{t-1}(z) \\ &= 1 - s_{t-1} - \Phi_{t-1} \frac{Q_{t-1}}{N_{t-1}}. \end{aligned}$$

Funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $dR_{t-1}(x)$ zdefiniowana jest następująco

$$dR_{t-1}(x) = \Phi_{t-1} Q_{t-1}(x) dG_{t-1}(x)$$

W okresie t nowo powstałe miejsca pracy mają rozkład produktywności dH_t dany przez połączenie rozkładów produktywności osób bezrobotnych, które znalazły pracę oraz rozkładu produktywności osób zmieniających pracę:

$$\begin{aligned} dH_t(x) &= \phi_{t-1} dF(x; 0) \\ &+ \frac{1 - \phi_{t-1}}{1 - \tilde{s}_{t-1} - s_{t-1}} \int_{\bar{a}_{t-1}}^{\infty} \left(g^{-1}(y) \right)' dT_{t-1} \left(g^{-1}(y) \right) \times dF(y; x) dy \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie ϕ_{t-1} jest odsetkiem osób uprzednio bezrobotnych wśród osób, które znalazły nową pracę danym przez:

$$\phi_{t-1} = \frac{\Phi_{t-1} e_{t-1} U_{t-1}}{\Phi_{t-1} e_{t-1} U_{t-1} + \Phi_{t-1} Q_{t-1}}$$

Mając dany rozkład osób, które znalazły nową pracę możemy łatwo wyznaczyć rozkład osób pracujących na początku okresu t przed destrukcją:

$$dG_t(x) = \alpha_{t-1} \times dG_t^1(x) + (1 - \alpha_{t-1}) \times dH_t(x)$$

gdzie współczynnik α_{t-1} zdefiniowany jako

$$\alpha_{t-1} = \frac{N_{t-1} - \Phi_{t-1}Q_{t-1}}{N_{t-1} - \Phi_{t-1}Q_{t-1} + M_{t-1}}$$

jest odsetkiem wśród osób pracujących na początku (tzn. jeszcze przed destrukcją) okresu t , które pracowały w poprzednim okresie na tym samym stanowisku pracy.

2.10 Zaburzenia stochastyczne

Rozpatrujemy jedno źródło zaburzeń agregatowych w postaci szoku technologicznego ε_t będącego zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią μ_A i wariancją σ_A^2 . Formalnie rzecz biorąc

$$\ln(A_t) = \rho_A \ln(A_{t-1}) + \varepsilon_t. \quad (17)$$

gdzie parametr ρ_A jest autokorelacją procesu technologicznego zmiennej $\ln(A_t)$.

3 Procedura rozwiązania modelu

Praktyczne rozwiązanie modelu wyspecyfikowanego w sekcji 2 wymaga wyznaczenia postaci funkcji wartości $V_t^F(a)$, $V_t^E(a)$ oraz funkcji polityki $W_t(a)$, $Q_t(a)$, a tym samym wyznaczenia postaci funkcji $\tilde{V}_t^F(a)$. To zadanie wymaga z kolei wyznaczenia progowego poziomu produktywności \bar{a}_t oraz obliczenia wartości oczekiwanej zdefiniowanej równaniem (12). Ponadto model wymaga wyznaczenia postaci funkcji gęstości występujących w nim rozkładów prawdopodobieństwa $dG_t(a)$, $dH_t(a)$, $dR_t(a)$ oraz powiązanych z nimi rozkładów pomocniczych. By to osiągnąć posługujemy się kilkustopniową procedurą numeryczną, której zasadnicza idea polega na wyznaczeniu nisko-wymiarowej aproksymacji wszystkich funkcji zależnych od indywidualnej produktywności pracy, a , oraz adekwatnych funkcji gęstości. Ogólna postać tych aproksymacji dla danej funkcji $\Omega_t(a)$ przyjmuje postać

$$\Omega_t(a) = \begin{cases} \sum_{i=0}^N W_{i,t}^\Omega \times T_i(h(a)), & \text{dla } a \in [a_0, a_1]; \\ \tilde{\Omega}_t(a), & \text{dla } a > a_1. \end{cases}$$

gdzie $T_i(a)$ jest i -tym wielomianem Chebysheva, natomiast $W_{i,t}^\Omega$ jest i -tą wagą aproksymacji funkcji $\Omega_t(a)$. Aproksymacja wielomianami Chebysheva jest określona na odcinku zwartym $[a_0, a_1]$, podczas gdy funkcja $h(a)$ jest jego afiniczną transformacją na odcinek $[-1, 1]$. Pozwala to wykorzystać znaną własność wielomianów Chebysheva zgodnie z którą dla dowolnego $x \in [-1, 1]$ ich wartość można wyznaczyć na podstawie rekurencji

$$T_{k+1}(x) = 2x \times T_k(x) - T_{k-1}(x)$$

z warunkami początkowymi $T_0(x) \equiv 1$, $T_1(x) \equiv x$. Ze względu na endogeniczną destrukcję występującą w modelu nie jest konieczne dokonywanie aproksymacji dla dostatecznie małych poziomów produktywności. Z kolei dla $a > a_1$ funkcja $\Omega_t(a)$ jest aproksymowana zadaną funkcją $\tilde{\Omega}_t(x)$ odzwierciedlającą asymptotyczne jej zachowanie się $\Omega_t(a)$ dla dużych wartości a . W zależności od postaci funkcji wyjściowej

$\bar{\Omega}_t(x)$ jest albo funkcją stałą, albo funkcją wykładniczą, albo funkcją malejącą kwadratowo.

$$\bar{\Omega}_t(x) = \begin{cases} \alpha_t^\Omega, & \text{w przypadku funkcji } Q_t(x); \\ \beta_t^\Omega \times e^{-\alpha_t^\Omega x^2}, & \text{w przypadku rozkładów } dG_t(x), dH_t(x), dR_t(x). \\ \beta_t^\Omega \times e^{\alpha_t^\Omega x}, & \text{w pozostałych przypadkach;} \end{cases}$$

Wagi aproksymacji $W_{i,t}^\Omega$ wyznaczyliśmy metodą kolokacji z węzłami Gaussa-Lobatto dla aproksymacji wielomianami Chebysheva, która dla $k = 0, 1, \dots, N$ dane są przez (por. [?])

$$x_k = -\cos\left(\frac{k \times \pi}{N}\right) \quad y_k = a_0 + \frac{1 - x_k}{2} \times (a_1 - a_0)$$

gdzie x_k jest k -tym węzłem rozmieszczonym na odcinku $[-1, 1]$, natomiast y_k jest k -tym węzłem na odcinku $[a_0, a_1]$. Wtedy

$$W_{i,t}^\Omega = \sum_{k=0}^N \Omega_t(y_k) \times \tilde{T}_{ik} \quad \tilde{T}_{ik} = \frac{2\delta_i \delta_k \times T_i(x_k)}{N}$$

gdzie $\delta_i = \frac{1}{2}$ dla $i = 0, N$ oraz $\delta_i = 1$ dla $i = 1, \dots, N - 1$. Ponieważ \tilde{T}_{ik} nie zależy ani od czasu ani od funkcji $\Omega_t(x)$, do wyznaczenia wag $W_{i,t}^\Omega$ wystarcza znajomość wartości funkcji $\Omega_t(x)$ w węzłach aproksymacji. Aproksymacje brakującej części dziedziny produktywności tj. $\bar{\Omega}_t(a)$ są budowane na podstawie wartości funkcji $\bar{\Omega}_t(x)$ w węzłach y_{N-1} oraz y_N .

W celu rozwiązania modelu konieczne jest także wyznaczenie wartości szeregu całek, należących do jednej z dwóch następujących postaci

$$I_t^\Omega(x) \equiv \int_{\bar{a}_t}^\infty \Omega_t(a) \times dF(a; x) \quad J_t^\Omega \equiv \int_{\bar{a}_t}^\infty \Omega_t(a) \times dZ_t(a)$$

gdzie $dF(a; x)$ jest zadaniem rozkładem, natomiast $dZ_t(a)$ jest rozkładem $dG_t(a)$ lub $dH_t(a)$. Ponieważ poszukujemy aproksymacji pierwszego rzędu rozwiązania modelu, bez straty numerycznej dokładności możemy aproksymować całki $I_t^\Omega(x)$ oraz J_t^Ω przez

$$I_t^\Omega(x) \sim \int_{\bar{a}}^\infty \Omega_t(a) \times dF(a; x) - (\bar{a}_t - \bar{a}) \times \Omega_t(\bar{a}) dF(\bar{a}; x) \\ J_t^\Omega \sim \int_{\bar{a}}^\infty \Omega_t(a) \times dZ_t(a) - (\bar{a}_t - \bar{a}) \times \Omega_t(\bar{a}) dZ_t(\bar{a})$$

gdzie \bar{a} jest wartością produktywności progowej w stanie ustalonym. Stosując kwadratury Clenshaw-Curtis'a mamy dalej

$$\int_{\bar{a}}^\infty \Omega_t(a) \times dF(a; x) \sim \sum_{i=0}^N W_{i,t}^\Omega \times I_i(x) + \int_{a_1}^\infty \bar{\Omega}_t(a) \times dF(a; x) \\ I_i(x) = \int_{\bar{a}}^{a_1} T_i(h(a)) \times dF(a; x)$$

Całkę $\int_{a_1}^\infty \bar{\Omega}_t(a) \times dF(a; x)$ można wyznaczyć analitycznie. Z kolei całki $I_i(x)$ nie zależą od czasu oraz od funkcji $\Omega_t(x)$ przez co mogą być wyznaczone numerycznie. Model jest parametryzowany w taki sposób, że wartość \bar{a} jest kalibrowana (ustalona). Tym samym całki $I_i(x)$ mogą być wyznaczone na wstępnym etapie rozwiązywania modelu i nie muszą być ponownie wyznaczane w każdym kroku procedury

wyznaczającej stan ustalony modelu, co znacznie przyspiesza procedurę numeryczną. A logicznie w przypadku całek J_t^Ω mamy

$$\int_{\bar{a}}^{\infty} \Omega_t(a) \times dZ_t(a) = \int_{\bar{a}}^{a_1} \Omega_t(a) \times dZ_t(a) + \int_{a_1}^{\infty} \bar{\Omega}_t(a) \times d\bar{Z}_t(a)$$

przy czym podobnie jak poprzednio całkę $\int_{a_1}^{\infty} \bar{\Omega}_t(a) \times d\bar{Z}_t(a)$ można wyznaczyć analitycznie. Dokonując aproksymacji Chebysheva funkcji $\Omega_t(a) \times dZ_t(a)$

$$\Omega_t(a) \times dZ_t(a) \sim \sum_{i=0}^N W_{i,t}^{\Omega dZ} \times T_i(h(a))$$

uzyskujemy

$$\int_{\bar{a}}^{a_1} \Omega_t(a) \times dZ_t(a) \sim \sum_{i=0}^N W_{i,t}^{\Omega dZ} \times \int_{\bar{a}}^{a_1} T_i(h(a))$$

gdzie całka $\int_{\bar{a}}^{a_1} T_i(a)$ jest wyznaczana numerycznie na wstępnym etapie rozwiązywania modelu.

W celu rozwiązania modelu wystarczy śledzić wartości funkcji zależnych od indywidualnej produktywności (tj. $V_t^F(a)$, $\tilde{V}_t^F(a)$, $W_t(a)$, $Q_t(a)$, $dH_t(a)$, $dG_t(a)$, $dR_t(a)$) w węzłach aproksymacji y_k dla $k = 0, \dots, N$. Zależności funkcyjne opisane w sekcjach (2.8, 2.9) w połączeniu z aproksymacjami opisanymi w niniejszej sekcji wyznaczają zależności między zmiennymi losowymi $W_{i,t}^\Omega$ określającymi wagi aproksymacji danej funkcji Ω w okresie t oraz zmiennymi losowymi α_t^Ω , β_t^Ω opisującymi asymptotyczne własności funkcji $\Omega_t(a)$ dla dużego a . Oznacza to, że w wyniku zastosowania opisanej procedury funkcje pierwotnie występujące w modelu zostały zredukowane do zbioru zmiennych losowych przez co model jako całość może być rozwiązany klasyczną metodą perturbacyjną.

W celu rozwiązania modelu zastosowaliśmy 20 punkową aproksymację, $N = 19$. W związku z niedokładnością procedury całkowania funkcji rozkładu $dG_t(a)$ oraz $dH_t(a)$ zostały unormowane w taki sposób, aby $I_{a_0}^\infty dG_t(a) = 1$, $I_{a_0}^\infty dH_t(a) = 1$, gdzie I jest aproksymacją operatora całkowania. Przyjeliśmy $a_0 = -4\sigma_A$. Wartość parametru a_1 została dobrana w taki sposób, aby $I_{a_0}^{a_1} dG(a) > 1 - 0.001$, gdzie $dG(a)$ jest rozkładem indywidualnej produktywności w stanie ustalonym. Łączna liczba zmiennych losowych wprowadzonych przez zastosowaną procedurę numeryczną jest rzędu $7 \times 2 \times N = 280$ (dla siedmiu funkcji modelu konieczne jest śledzenie wartości funkcji w węzłach oraz wag aproksymacji). Wprowadzenie takiej liczby zmiennych nie wiąże się z istotnym wzrostem czasu koniecznego do rozwiązania modelu tym samym w ramach opisanej procedury numerycznej możliwe jest rozwiązanie modeli znacznie bardziej ogólnych.

4 Parametryzacja

Model kalibrujemy w taki sposób by jak najlepiej odzwierciedlał stacjonarne i cykliczne własności gospodarki amerykańskiej. Prezentujemy dwie alternatywne kalibracje różniące się interpretacją zmiennych N_t i U_t . W modelu 1 oznaczają one odpowiednio zatrudnienie i brak zatrudnienia (a więc zarówno bierność zawodową jak i rzeczywiste bezrobocie). W modelu 2 z naszego horyzontu zainteresowania wykluczamy osoby bierne, tak że U_t można interpretować bezpośrednio jako bezrobocie (wraz z osobami pół-związanymi z rynkiem pracy) przy niezmienionej interpretacji zmiennej N_t jako zatrudnienia (por. Jones i Riddell (1999)). W konsekwencji

odpowiednie wartości stacjonarne obu zmiennych wynoszą w modelu 1: $N_{ss} = 0.7$ i $U_{ss} = 0.3$ oraz w modelu 2: $N_{ss} = 0.9$ i $U_{ss} = 0.1$. Parametrem kalibrującym te wielkości jest produktywność wytwarzania dóbr w gospodarstwie domowym wynosząca odpowiednio $b = 0.68$ i $b = 0.88$. Jest to powyżej wartość tego parametru zaproponowanej przez Shimera(2005) na poziomie $b = 0.4$, która odpowiada jednak raczej zakresowi transferów pieniężnych otrzymywanych przez osoby bezrobotne pomijając dodatkowe korzyści z czasu wolnego. Jednocześnie tylko w modelu 2 skalibrowana wielkość odpowiada górnej granicy wyznaczonej przez Hagedorna i Maniovskiego (2008) na poziomie 0.9. Parametry jedyne go zagregowanego procesu stochastycznego w modelu tj. A_t dobraliśmy tak, aby zmienność produktu w cyklu koniunkturalnym odpowiadała zmienności zaobserwowanej empirycznie dla USA. I tak autokorelację zagregowanego procesu technologicznego ustaliliśmy na poziomie $\rho_A = 0.9$, zaś odchylenie standardowe innowacji technologicznych na poziomie $\sigma_Y = 0.007$ tj. identycznym jak ten zasugerowany przez Hagedorna i Maniovskiego (2008). Stacjonarna wartość produktu $Y_{ss} = 1$ została skalibrowana poprzez odpowiednie ustalenie wartości oczekiwanej procesu technologicznego $\mu_A = -0.08$ lub $\mu_A = -0.06$ w modelach 1 i 2. Z kolei, stopa deprecjacji kapitału trwałego $\delta = 0.025$ oraz subiektywna stopa dyskonta $\beta = 0.99$ zostały ustalone na standardowym w literaturze poziomie. Bilans rachunków narodowych dopełniają wydatki firm na wakaty, które za pomocą parametru $\varpi = 0.08$ (model 1) lub $\varpi = 0.1$ (model 2) zostały skalibrowane do poziomu $\varpi \times V_{ss} = 0.01$. Podstawowym mechanizmem rozpatrywanym w modelu jest poszukiwanie pracy przez osoby pracujące. Za własności tego procesu odpowiadają przede wszystkim parametry funkcji kosztów poszukiwania pracy $c_t^j(x)$ dla $j \in \{E, U\}$. I tak parametr $c_\alpha^U = 0.02$ (model 1) lub $c_\alpha^U = 0.01$ (model 2) ustalamy w taki sposób aby w stanie stacjonarnym wysiłek poszukiwania pracy przez bezrobotnych był znormalizowany do jedynki ($e_{ss} = 1$). Z kolei parametr $c_\alpha^E = 0.06$ (model 1) lub $c_\alpha^E = 0.01$ (model 2) wyznacza prawdopodobieństwo zmiany pracy przez osobę pracującą na 2.5proc. Stopa egzogenicznej destrukcji miejsc pracy jest ustalona na znanym z literatury poziomie $\rho = 0.04$. Kwartalne prawdopodobieństwo zapełnienia wakatu Φ_{ss} skalibrowano, za pomocą parametru $\Upsilon = 0.9$ (model 1) lub $\Upsilon = 0.6$ (model 2), na poziomie 0.9, odpowiadającym przeciętnej długości wystawiania wakatu wynoszącej około 45 dni. Drugą grupę parametrów stanowią elastyczności. Międzyokresową elastyczność substytucji konsumpcji ustalamy na nieco niższym niż zwyczajowo przyjmowany w literaturze poziomie $\sigma = 1.8$. Udział pracy w produkcie standardowo wynosi $\alpha = 0.36$. Z kolei parametr μ decydujący o elastyczności liczby tworzonej miejsc pracy względem liczby jej ofert ustalamy na poziomie $\mu = 0.7$. Kluczowym parametrem decydującym w modelach poszukiwań i dopasowań o zmienności bezrobocia jest siła przetargowa pracowników i bezrobotnych w negocjacjach placowych ν . Różnicujemy ją między oboma modelami kalibrując ich własności cykliczne. I tak $\nu = 0.55$ w modelu 1 oraz $\nu = 0.45$ w modelu 2. Drugim parametrem mającym wpływ na zmienność bezrobocia i wakatów jest wypukłość funkcji kosztu poszukiwania pracy przez bezrobotnych i pracujących, które ustalamy odpowiednio na poziomie $c_\beta^U = 1.8$ i $c_\beta^E = 1.6$ w modelu 1 oraz $c_\beta^U = 1.55$ i $c_\beta^E = 1.58$ w modelu 2. Zmienność indywidualnych szoków produktywności jest znacznie większa $\sigma_A = 0.5$.

5 Własności

Podobnie jak inni autorzy zajmujący się zagadnieniem on-the-job search i endogenicnej destrukcji miejsc pracy przedstawienie własności modelu rozpoczynamy od analizy zachowania się głównych agregatów w cyklu koniunkturalnym. Wśród obu rozpatrywanych kalibracji nieco lepiej sprawdza się Model 2, w którym zarówno zmienność wakatów jak i bezrobocia niemal odpowiadają obserwacjom (por. tablica 2). Dzieje się tak dlatego, że w wypadku modelu 1, zasób osób bezrobotnych jest relatywnie duży, a przez to szansa znalezienia pracy przez każdego z nich jest niższa, co zmniejsza ich skłonność do zmiany intensywności poszukiwania pracy w reakcji na szoki technologiczne. W konsekwencji lepszą interpretacją zmiennej U_t w modelu 1 jest raczej 'brak zatrudnienia' tj. kombinacja bezrobocia i bierności zawodowej. Zmienność tego agregatu w danych jest odpowiednio niższa. Model 2 znacznie lepiej od modelu 1 odzwierciedla także strukturę czasową korelacji bezrobocia z wakatami, cechując się w szczególności bliską rzeczywistości krzywą Beveridge'a (por. tablica 3). Cecha ta wiąże się z podobnie dobrym zachowaniem się korelacji obu wielkości z produktem, widocznym w obu modelach, lecz zwłaszcza w modelu 2. Tym samym także współczynnik zwartości rynku pracy θ_t zachowuje się w modelu w zgodzie z obserwacjami. Powodem dla, którego model dobrze odzwierciedla te prawidłowości jest współwystępowanie na rynku pracowników poszukujących pracę i osób bezrobotnych. W odpowiedzi na dodatni szok technologiczny zwiększa się intensywność poszukiwań obu grup. Ponieważ jednak bezrobocie maleje w wyniku zapełniających się wakatów, całkowita liczba ofert pracy może być acykliczna lub wręcz antycykliczna.

Obie przedstawione kalibracje współdziela z wieloma innymi modelami dopasowań i poszukiwań zbyt niską zmienność wynagrodzeń w porównaniu z obserwacjami, a jednocześnie nie adekwatną strukturę korelacji czasowej produktem - o ile bieżąca korelacja odchylenia płac i produktu od trendu jest porównywalna w modelu do danych, to już korelacje opóźnione różnią się dość znacznie. Warto jednak podkreślić, że jedynym źródłem wahań cyklicznych rozpatrywanych w modelu są szoki technologiczne, co w rzeczywistej gospodarce może nie mieć miejsca. Dobrymi własnościami empirycznymi model w obu rozpatrywanych specyfikacjach odznacza się natomiast w zakresie odzwierciedlenia cyklicznych własności udziału wynagrodzenia pracy w produkcie i produktywności. W obu wypadkach dopasowanie jest jednak gorsze niż dla bezrobocia i zatrudnienia, co jest spowodowane gorszym zachowaniem się modelu w obszarze płac a w pierwszej z rozpatrywanych specyfikacji także zatrudnienia. Na koniec warto podkreślić, że model umożliwia odzwierciedlenie empirycznego rozkładu płac, jednak analiza jego cyklicznych własności w tym zakresie jest utrudniona ze względu na niską rozdzielczość danych empirycznych o zachowaniu się relatywnych wynagrodzeń w kolejnych decyłach dochodowych w przekroju cyklu koniunkturalnego. Ponieważ naszym głównym celem było zaprezentowanie metody wprowadzenia heterogenizacji ex-post w obręb modeli DSGE rozwiązywanych metodą perturbacyjną, a nie analiza cyklicznych własności rozkładu płac w gospodarce to zagadnienie pozostawiamy do dalszych badań.

Tablica 1: Parametryzacja modeli 1 i 2

| Nazwa parametru | Wartość Model1 | Wartość Model2 | Kalibrowana Zmienna | Interpretacja parametru |
|-----------------|----------------|----------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| μ_A | -0.08 | -0.06 | $Y_{ss} = 1.000$ | średnia wart. szoku techn |
| δ | 0.025 | 0.025 | $I_{ss} = 0.25$ | stopa deprecjacji |
| ϖ | 0.08 | 0.10 | $\varpi \times V_{ss} = 0.010$ | koszt wakatów |
| β | 0.99 | 0.99 | $r_{ss} = 0.04$ | subiektywna stopa dyskonta |
| b | 0.68 | 0.88 | $N_{ss} = \{0.7, 0.9\}$, | efekt. produkcji domowej |
| c_α^U | 0.02 | 0.01 | $e_{ss} = 1$ | koszt poszukiwań przez bezrobotnych |
| c_α^E | 0.06 | 0.01 | $\Psi_{ss}^{OJS} = 0.025$ | koszt poszukiwań przez pracujących |
| ρ | 0.04 | 0.04 | - | egzogen. destr. miejsc pracy |
| Υ | 0.90 | 0.60 | $\Phi_{ss} = 0.900$ | efekt. zapełniania wakatów |
| σ | 1.8 | 1.8 | - | międzyokr. elast. subst.kons. |
| α | 0.36 | 0.36 | - | elastyczność Y wzgl. K |
| ν | 0.55 | 0.45 | - | siła przetargowa bezrobotnych |
| μ | 0.7 | 0.7 | - | elast. M wzgl. O |
| c_β^U | 1.8 | 1.55 | - | wyp. kosztu poszuk. bezrobotnych |
| c_β^E | 1.6 | 1.58 | - | wyp. kosztu poszuk. pracujących |
| ρ_Y | 0.9 | 0.9 | - | autokorel procesu techn. |
| σ_Y | 0.007 | 0.007 | - | odch. std. szoku techn |
| σ_A | 0.5 | 0.5 | - | odch. std. indywid. szoku |

Tablica 2: Podstawowe własności cykliczne modeli 1 i 2 na tle statystyk dla USA

| Zmienna | USA | | Model1 | | Model2 | |
|---------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|
| | σ_X | $\sigma_{X/Y}$ | σ_X | $\sigma_{X/Y}$ | σ_X | $\sigma_{X/Y}$ |
| Produkt | 0.013 | 1.000 | 0.018 | 1.000 | 0.016 | 1.000 |
| Konsumpcja | 0.008 | 0.580 | 0.012 | 0.654 | 0.010 | 0.635 |
| Inwestycje | 0.044 | 3.466 | 0.040 | 2.267 | 0.033 | 2.052 |
| Pracujący | 0.009 | 0.687 | 0.016 | 0.889 | 0.013 | 0.792 |
| Bezrobotni | 0.121 | 9.568 | 0.037 | 2.074 | 0.114 | 7.132 |
| Wakaty | 0.111 | 8.840 | 0.124 | 7.016 | 0.131 | 8.186 |
| Wynagrodzenia | 0.007 | 0.702 | 0.003 | 0.144 | 0.002 | 0.130 |
| Udział pracy | 0.003 | 0.231 | 0.002 | 0.095 | 0.002 | 0.126 |
| Produktywność | 0.005 | 0.400 | 0.004 | 0.231 | 0.004 | 0.252 |
| Hazard N-N | 0.000 | 1.750 | 0.158 | 8.928 | 0.193 | 12.103 |
| Hazard N-U | 0.016 | 7.320 | 0.113 | 6.384 | 0.103 | 6.444 |
| Hazard U-N | 0.068 | 0.000 | 0.132 | 7.452 | 0.183 | 11.461 |

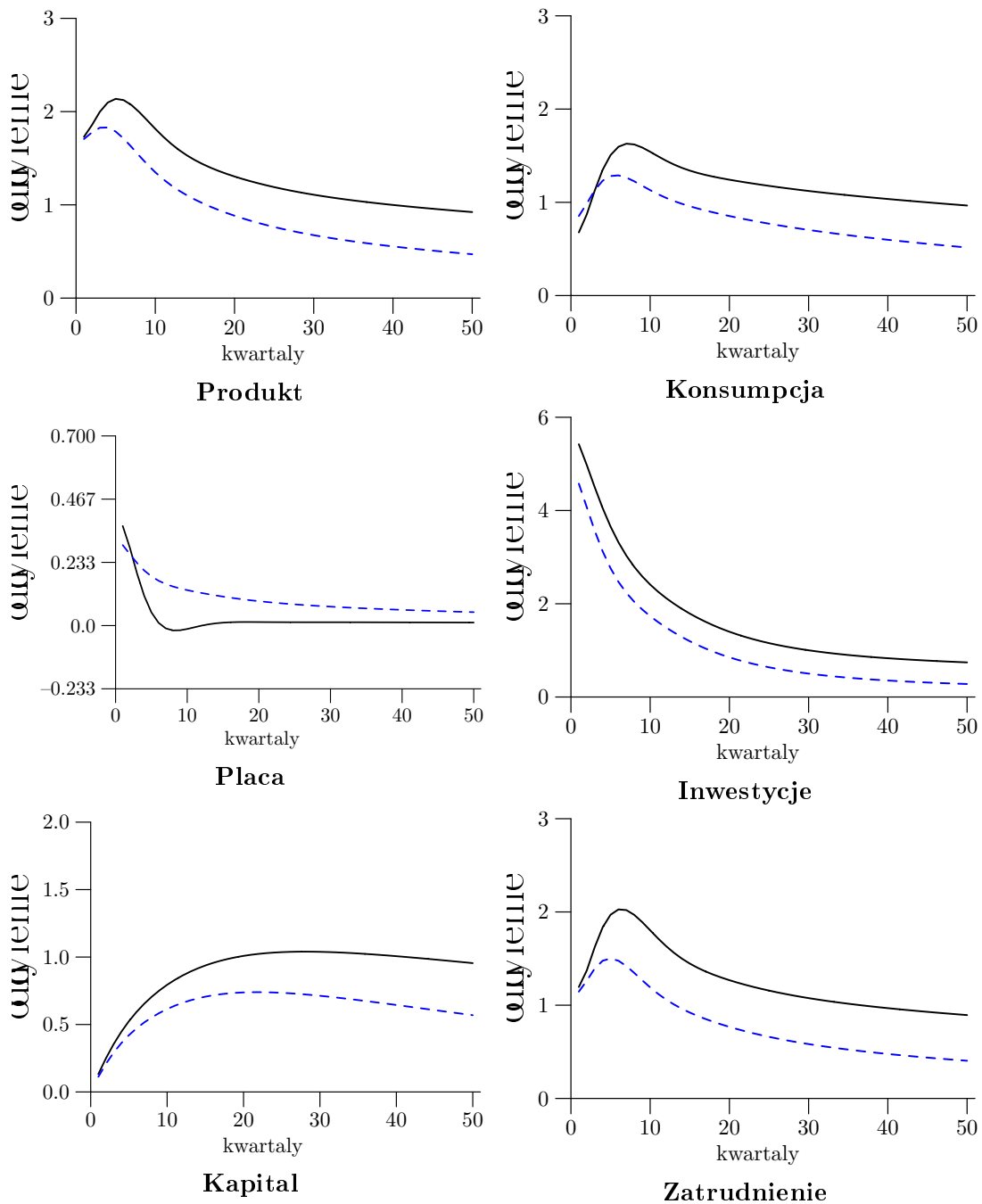
Tablica 3: Czasowa struktura korelacyjna typu lead-lag bezrobocia wakatami ($\rho(X_t, V_{t+\tau})$) w moedlu 1, modelu 2 oraz danymi US (*italic*)

| Zmienna | | | Opóźnienie (τ) | | | | | | |
|------------|-------|-----------|-----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 |
| Bezrobotni | U_t | Model1 | -0.83 | -0.88 | -0.79 | -0.60 | -0.37 | -0.15 | 0.03 |
| | | Model2 | -0.82 | -0.94 | -0.92 | -0.76 | -0.55 | -0.32 | -0.12 |
| | | <i>US</i> | <i>-0.35</i> | <i>-0.60</i> | <i>-0.81</i> | <i>-0.92</i> | <i>-0.89</i> | <i>-0.73</i> | <i>-0.49</i> |

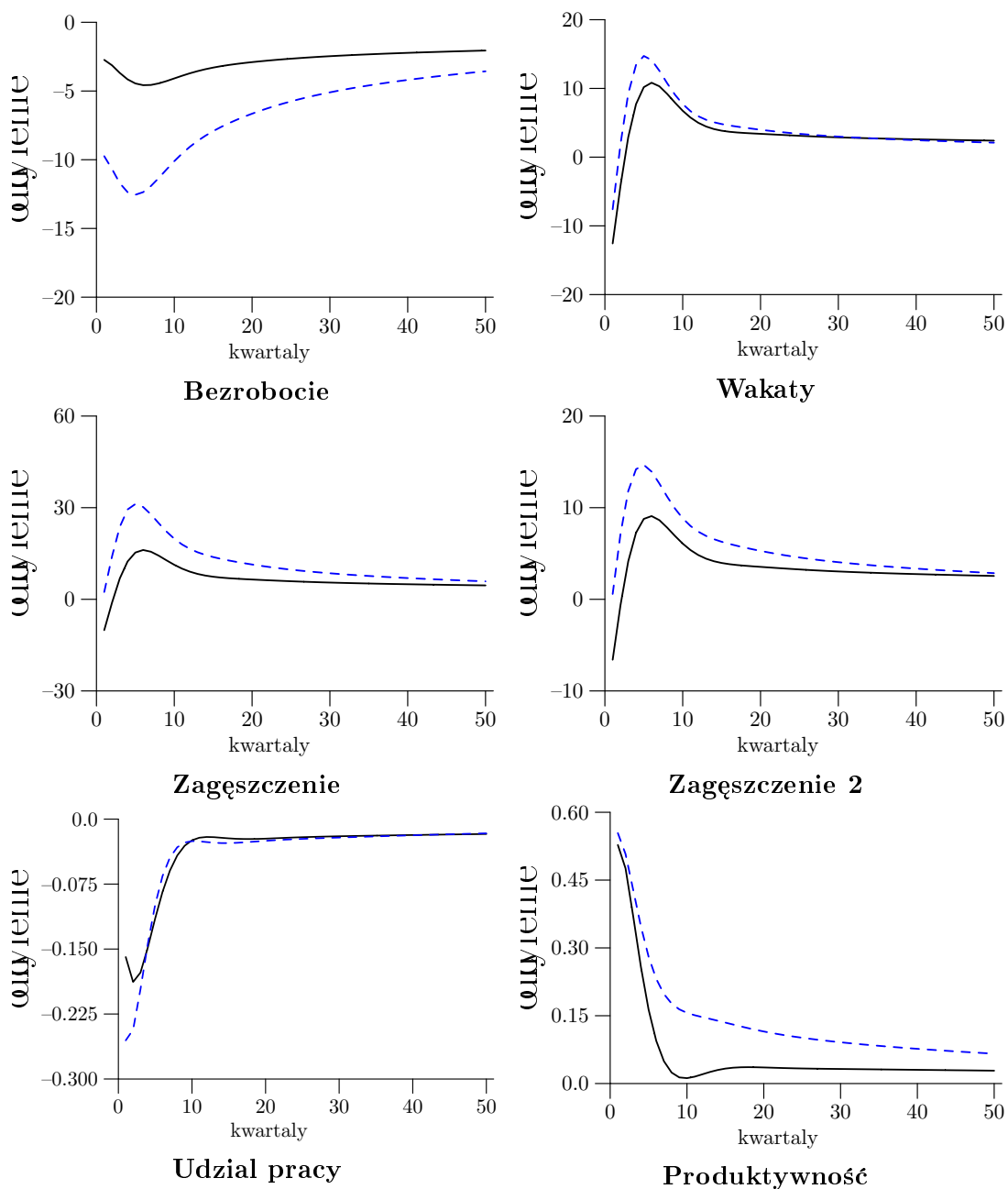
Tablica 4: Czasowa struktura korelacyjna typu lead-lag głównych zmiennych makroekonomicznych z produktem ($\rho(X_t, Y_{t+\tau})$) w modelach 1 i 2 oraz w danych US (*italic*)

| Zmienna | | | Opóźnienie (τ) | | | | | | |
|---------------|--------|-----------|-----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| | | | -3 | -2 | -1 | 0 | +1 | +2 | +3 |
| Produkt | Y_t | Model11 | 0.55 | 0.77 | 0.94 | 1.00 | 0.94 | 0.77 | 0.55 |
| | | Model12 | 0.49 | 0.74 | 0.93 | 1.00 | 0.93 | 0.74 | 0.49 |
| | | <i>US</i> | <i>0.46</i> | <i>0.73</i> | <i>0.92</i> | <i>1.00</i> | <i>0.92</i> | <i>0.73</i> | <i>0.46</i> |
| Konsumpcja | C_t | Model1 | 0.30 | 0.54 | 0.76 | 0.92 | 0.99 | 0.95 | 0.83 |
| | | Model2 | 0.34 | 0.60 | 0.82 | 0.96 | 0.98 | 0.88 | 0.70 |
| | | <i>US</i> | <i>-0.20</i> | <i>-0.13</i> | <i>-0.03</i> | <i>0.05</i> | <i>0.10</i> | <i>0.13</i> | <i>0.14</i> |
| Inwestycje | I_t | Model1 | 0.71 | 0.88 | 0.96 | 0.91 | 0.71 | 0.43 | 0.15 |
| | | Model2 | 0.64 | 0.85 | 0.97 | 0.94 | 0.76 | 0.48 | 0.18 |
| | | <i>US</i> | <i>0.45</i> | <i>0.71</i> | <i>0.90</i> | <i>0.95</i> | <i>0.83</i> | <i>0.56</i> | <i>0.22</i> |
| Pracujący | N_t | Model1 | 0.43 | 0.67 | 0.86 | 0.98 | 0.98 | 0.88 | 0.71 |
| | | Model2 | 0.83 | 0.88 | 0.79 | 0.60 | 0.37 | 0.15 | -0.03 |
| | | <i>US</i> | <i>0.18</i> | <i>0.44</i> | <i>0.68</i> | <i>0.86</i> | <i>0.94</i> | <i>0.88</i> | <i>0.73</i> |
| Bezrobotni | U_t | Model1 | -0.43 | -0.67 | -0.86 | -0.98 | -0.98 | -0.88 | -0.71 |
| | | Model2 | -0.41 | -0.66 | -0.87 | -0.99 | -0.97 | -0.83 | -0.63 |
| | | <i>US</i> | <i>-0.28</i> | <i>-0.53</i> | <i>-0.75</i> | <i>-0.88</i> | <i>-0.90</i> | <i>-0.80</i> | <i>-0.61</i> |
| Wakaty | V_t | Model1 | -0.18 | -0.03 | 0.17 | 0.44 | 0.71 | 0.89 | 0.91 |
| | | Model2 | 0.00 | 0.18 | 0.41 | 0.67 | 0.88 | 0.97 | 0.90 |
| | | <i>US</i> | <i>0.35</i> | <i>0.60</i> | <i>0.81</i> | <i>0.90</i> | <i>0.84</i> | <i>0.66</i> | <i>0.40</i> |
| Wynagrodzenia | W_t | Model1 | 0.66 | 0.70 | 0.62 | 0.41 | 0.09 | -0.25 | -0.52 |
| | | Model2 | 0.63 | 0.84 | 0.97 | 0.94 | 0.76 | 0.47 | 0.18 |
| | | <i>US</i> | <i>-0.77</i> | <i>-0.51</i> | <i>0.19</i> | <i>0.71</i> | <i>0.47</i> | <i>0.01</i> | <i>-0.27</i> |
| Produktywność | LP_t | Model1 | -0.70 | -0.82 | -0.85 | -0.76 | -0.53 | -0.22 | 0.11 |
| | | Model2 | -0.67 | -0.81 | -0.86 | -0.75 | -0.49 | -0.14 | 0.20 |
| | | <i>US</i> | <i>-0.31</i> | <i>-0.29</i> | <i>-0.27</i> | <i>-0.20</i> | <i>0.33</i> | <i>0.51</i> | <i>0.43</i> |
| Udział pracy | LS_t | Model1 | 0.70 | 0.77 | 0.74 | 0.57 | 0.28 | -0.07 | -0.37 |
| | | Model2 | 0.66 | 0.84 | 0.93 | 0.87 | 0.64 | 0.31 | -0.01 |
| | | <i>US</i> | - | - | - | - | - | - | - |
| Hazard N-N | | Model1 | -0.10 | 0.06 | 0.27 | 0.53 | 0.77 | 0.92 | 0.91 |
| | | Model2 | 0.15 | 0.36 | 0.59 | 0.81 | 0.96 | 0.97 | 0.83 |
| | | <i>US</i> | - | - | - | - | - | - | - |
| Hazard N-U | | Model1 | -0.57 | -0.57 | -0.47 | -0.26 | 0.06 | 0.40 | 0.66 |
| | | Model2 | -0.51 | -0.51 | -0.41 | -0.18 | 0.17 | 0.51 | 0.76 |
| | | <i>US</i> | <i>0.43</i> | <i>0.36</i> | <i>-0.31</i> | <i>-0.64</i> | <i>-0.11</i> | <i>0.26</i> | <i>0.24</i> |
| Hazard U-N | | Model1 | -0.38 | -0.29 | -0.12 | 0.14 | 0.44 | 0.72 | 0.90 |
| | | Model2 | -0.15 | 0.02 | 0.24 | 0.51 | 0.78 | 0.95 | 0.99 |
| | | <i>US</i> | <i>-0.57</i> | <i>-0.52</i> | <i>0.15</i> | <i>0.87</i> | <i>0.61</i> | <i>-0.22</i> | <i>-0.62</i> |

Rysunek 1: Funkcje reakcji na szok technologiczny głównych agregatów makroekonomicznych w modelu 1 (linia ciągła) i modelu 2 (linia przerywana)



Rysunek 2: Funkcje reakcji na szok technologiczny głównych agregatów rynku pracy w modelu 1 (linia ciągła) i modelu 2 (linia przerywana)



6 Podsumowanie

W niniejszym artykule konstruujemy dynamiczny, stochastyczny model równowagi ogólnej wyposażony w nietrywialną heterogenizację *ex-post* podmiotów ekonomicznych. Proponujemy sposób pokonania dwóch podstawowych barier jakie utrudniają uwzględnianie szoków idiosynkratycznych w ramach metodologii DSGE. Pierwszą z nich jest konieczność wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych złożonych wyrażeń algebraicznych przy niestandardowych rozkładach prawdopodobieństwa. Drugą ciągły charakter przestrzeni na której określone są odpowiednie funkcje wartości i polityki tj. np. niewystępowanie w modelu jednej płacy tylko pełnego rozkładu wynagrodzeń osób o różnych indywidualnych poziomach produktywności. Proponujemy algorytm rozwiązywania, w którym wszystkie zależne od idiosynkratycznych zaburzeń funkcje są aproksymowane wielomianami Chebyszewa, a ich wartości oczekiwane względem odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa obliczane są numerycznie. Pozwala to na zredukowanie równań definiujących odpowiednie problemy decyzyjne do skończonego zbioru zmiennych losowych, a tym samym umożliwia rozwiązanie całego modelu klasyczną metodą perturbacyjną Judda (1993). Od strony empirycznej artykuł wpisuje się w dyskusję wokół potencjału modeli poszukiwań i dopasowań do odzwierciedlenia podstawowych własności cyklicznych rynku pracy. W modelu zmienność zarówno wakatów jak i bezrobocia odpowiada obserwacjom. Model dobrze odzwierciedla także strukturę czasową korelacji bezrobocia z wakacjami, cechując się w szczególności bliską rzeczywistości krzywą Beveridge'a. Cecha ta wiąże się z podobnie dobrym zachowaniem się korelacji obu wielkości z produktem. Podobnie dobrze zachowuje się w nim współczynnik zwartości rynku pracy, produktywność pracy i udział pracy w produkcji. W tym ostatnim wypadku dopasowanie modelu do danych jest nieco gorsze ze względu na współdzieloną z innymi modelami poszukiwań i dopasowań ograniczoną zdolność do odzwierciedlenia zmienności płac w przekroju cyklu koniunkturalnego. Jednocześnie jednak model inkorporuje empirycznie poprawny rozkład płac stwarzając platformę do teoretycznej analizy takich zagadnień instytucjonalnych związanych z zakresem nierówności w gospodarce jak związek między płacą minimalną i bezrobociem, wpływ progresji podatkowej na podaż pracy i kapitału czy zmienność nierówności dochodowych w czasie.

Literatura

- [1] Andolfatto D. Business cycle and labor market search. *American Economic Review*, 86:112–132, 1996.
- [2] Manovskii I. Hagedorn M. The cyclical behavior of equilibrium unemployment and vacancies revisited. *American Economic Review*, 98:1692–1706, 2008.
- [3] Lubik T.A. Krause M.U. The cyclical upgrading of labor and on-the-job search. *Labour Economics*, 13:459–477, 2006.
- [4] Prescott E.C. Kydland F.E. Time to build and aggregate fluctuations. *Econometrica*, 91:39–69, 1982.
- [5] Merz M. Search in the labor market and real business cycle. *Journal of Monetary Economics*, 36:269–300, 1995.
- [6] Pissarides C.A. Mortensen D.T. Job creation and job destruction in the theory of unemployment. *The Review of Economic Studies*, 61:397–415, 1994.
- [7] Hertweck M.S. Endogenous on-the-job search and frictional wage dispersion. *Unpublished Manuscript, University of Basel and IfW*, 2010.
- [8] Hall R. Employment fluctuations with equilibrium wage stickiness. *The American Economic Review*, 95:50–65, 2005.
- [9] Shimer R. The cyclical behavior of equilibrium unemployment and vacancies. *American Economic Review*, 95:25–49, 2005.
- [10] Shimer R. On-the-job search and strategic bargaining. *European Economic Review*, 50:811–830, 2006.